

Étude numérique de la convection naturelle instationnaire bidimensionnelle dans une enceinte allongée, de grand axe horizontal et de section carrée, inclinée eu égard au plan horizontal et chauffée par deux côtés opposés

Abdelaziz Skouta, Michel Aimé Randriazanamparany, Michel Daguenet*

Laboratoire de Thermodynamique et Énergétique, 52 Avenue de Villeneuve, 66860 Perpignan cedex, France

(Reçu le 18 octobre 1999, accepté le 7 juillet 2000)

Résumé — Les auteurs explorent numériquement, à l'aide d'une méthode aux différences finies, la route vers le chaos suivie par le système lorsque le nombre de Rayleigh Ra augmente. Ils montrent que plus sa valeur est grande, plus les résultats sont sensibles aux choix des pas d'espace et de temps. L'attracteur transite d'un point limite à un cycle limite via une bifurcation de Hopf surcritique pour une valeur comprise entre $1,11 \cdot 10^5$ et $1,12 \cdot 10^5$. Quand Ra continue d'augmenter, l'attracteur traverse une cascade sous-harmonique et six doublements de période sont visibles. Un chaos semble apparaître lorsque ce nombre devient de l'ordre de $1,13 \cdot 10^6$. Pour $2,45 \cdot 10^6$, un phénomène de relaminarisation se manifeste et persiste jusqu'à $3,9 \cdot 10^6$. Dans cette fenêtre laminaire, l'attracteur est un cycle limite inscrit sur un tore T^2 . Pour $Ra = 4 \cdot 10^6$, l'attracteur semble, à nouveau, chaotique. © 2001 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

mécanique des fluides / thermique / convection naturelle / enceinte fermée / bifurcations / chaos / point limite / cycle limite / cascade sous-harmonique / exposant de Lyapunov / attracteur étrange

Abstract — Numerical study of two-dimensional transient natural convection in an air filled square enclosure, tilted in relation to the horizontal plane, heated from two opposite sides. Using finite-difference discretization procedures, authors explore numerically the route to chaos followed by the system when the Rayleigh number Ra increases. They show that the larger the Rayleigh number is, the more sensitive the attractor becomes to time steps and mesh grids. The attractor bifurcates from a limit point to a limit cycle via an overcritical Hopf bifurcation for a Rayleigh number value between $1,11 \cdot 10^5$ and $1,12 \cdot 10^5$. When the Rayleigh number is increased again, six period-doublings are observed. The attractor comes out chaotic for $Ra = 1,13 \cdot 10^6$. For $2,45 \cdot 10^6$, a laminar flow appears and persists until $3,9 \cdot 10^6$. Inside this window, the attractor is a limit cycle fit on a two-torus. For $Ra = 4 \cdot 10^6$, the attractor appears chaotic again. © 2001 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

fluid mechanics / heat transfer / natural convection / closed cavity / bifurcations / chaos / limit point / limit cycle / period-doubling / Lyapunov exponent / strange attractor

Nomenclature

| | | | | | |
|------|--|--------------------|--------------|--|---|
| a | diffusivité thermique | $m^2 \cdot s^{-1}$ | H | longueur des parois prise comme longueur caractéristique | m |
| d | dimension fractale de l'attracteur | | L | plus grand exposant de Lyapunov | |
| dt | pas de temps adimensionnel | | Nu_{AB+CD} | nombre de Nusselt global sur les parois AB et CD = $\int_0^1 (\partial T / \partial y)_{y=0} dx + \int_0^1 (\partial T / \partial y)_{y=1} dx$ | |
| f | fréquence adimensionnelle | | N_x | nombre de nœuds suivant l'axe Ax | |
| g | accélération de la pesanteur | $m^2 \cdot s^{-1}$ | N_y | nombre de nœuds suivant l'axe Ay | |
| | | | Pr | nombre de Prandtl = ν/a | |
| | | | Ra | nombre de Rayleigh = $g\beta(T_{ch}^* - T_{fr}^*)H^3/(\nu a)$ | |
| | | | t | temps adimensionnel = t^*a/H^2 | |

* Correspondance et tirés à part.

E-mail addresses: skouta@univ-perp.fr (A. Skouta), randria@univ-perp.fr (M. Randriazanamparany), daguenet@univ-perp.fr (M. Daguenet).

- T température adimensionnelle
 $= (T^* - T_{fr}^*) / (T_{ch}^* - T_{fr}^*)$
- U composante de la vitesse adimensionnelle
 suivant la direction $Ax = U^*a/H$
- V composante de la vitesse adimensionnelle
 suivant la direction $Ay = V^*a/H$
- x, y coordonnées cartésiennes adimensionnelles
 $= x^*/H$ et y^*/H

Symboles grecs

- α angle d'inclinaison du côté AB par rapport
 à l'axe horizontal rad
- β coefficient d'expansion thermique K^{-1}
- λ conductivité thermique $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
- ν viscosité cinématique $m^2 \cdot s^{-1}$
- Ψ fonction de courant adimensionnelle
 $= \Psi^*/a$
- Ω vorticité adimensionnelle $= \Omega^*H^2/a$

Indices

- c valeur au centre de l'enceinte
- ch valeur sur les parois chaudes
- cr valeur critique
- fr valeur sur les parois froides
- max valeur maximale
- min valeur minimale
- 0 valeur initiale
- r valeur de référence

Exposant

- * valeur dimensionnelle

1. INTRODUCTION

Les chercheurs s'intéressent depuis longtemps à la convection naturelle qui se développe dans des enceintes fermées, étant donné son implication dans de nombreux phénomènes naturels et processus industriels, par exemple le refroidissement des circuits électroniques et des réacteurs nucléaires ; elle intervient aussi dans l'isolation des bâtiments avec les briques creuses et les doubles vitrages. Il est impossible de citer tous les travaux auxquels elle a donné matière et nous renvoyons le lecteur aux nombreuses bibliographies, telles celles proposées par Ostrach [1, 2] et Catton [3].

La découverte des routes vers le chaos déterministe a renouvelé l'intérêt porté à ce phénomène dont l'étude s'effectue désormais, le plus souvent, sous cet éclairage [4, 5].

Les cavités parallépipédiques à parois horizontales adiabatiques et à parois verticales différentiellement chauffées ont été les plus étudiées à la fois d'un point de vue numérique [6-8] et expérimental [6, 9, 10].

Une attention particulière a été accordée aux écoulements multicellulaires [7, 11-13].

Le cas d'une cavité très allongée suivant un axe horizontal, de section droite carrée, inclinée de façon que ses plans diagonaux soient l'un vertical, l'autre horizontal et chauffée par deux côtés opposés n'a fait l'objet, à notre connaissance, que de deux publications [14, 15]. Pourtant, une telle configuration est répandue, par exemple dans les canalisations et en isolation ; de plus, lorsque le transfert de chaleur est essentiellement conductif, la zone de mélange est horizontale, particularité qui ne semble pas avoir retenu l'attention.

Précisément, dans ce travail, nous étudions numériquement la convection naturelle thermique bidimensionnelle instationnaire se développant dans un fluide newtonien, (en l'occurrence de l'air), qui remplit une telle cavité, à l'aide du modèle classique de Boussinesq et d'une technique aux différences finies.

La figure 1 schématise une section transversale du système par un plan vertical ainsi que le repère cartésien bidimensionnel (A, x, y) , l'enceinte étant supposée très allongée suivant la direction Az perpendiculaire au plan de la figure. Initialement, le système est en équilibre thermodynamique à la température T_0^* (l'exposant * indique une valeur dimensionnelle). A partir d'un instant t_0^* pris comme origine du temps, les parois AB et CD sont portées à la température T_{ch}^* et les parois BC et AD à la température T_{fr}^* avec $T_{ch}^* > T_{fr}^*$. Le nombre de Prandtl est fixé à 0,71 et on suppose qu'il n'y a pas de rayonnement. Dans l'équation de la chaleur, les variations de la pression et la dissipation visqueuse par suite de la viscosité du fluide sont négligées.

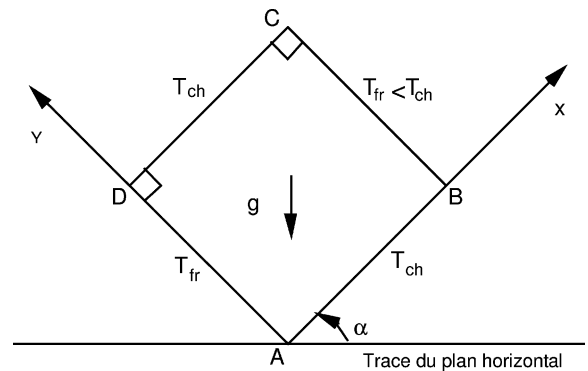


Figure 1. Représentation schématique d'une section transversale du système par un plan vertical et du repère cartésien (A, x, y) .

Figure 1. Schematic representation of the system section in the Cartesian frame (A, x, y) .

2. FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

Pour un écoulement bidimensionnel d'un fluide incompressible à propriétés physiques constantes, dans le repère (A, x, y) , les équations de transfert s'écrivent sous forme divergente adimensionnelle, selon les notations données dans la nomenclature, comme suit :

- *Équation de la chaleur :*

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(UT)}{\partial x} + \frac{\partial(VT)}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (1)$$

- *Équation de la vorticité :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial(U\Omega)}{\partial x} + \frac{\partial(V\Omega)}{\partial y} \\ = Ra Pr \left[\cos \alpha \frac{\partial T}{\partial x} - \sin \alpha \frac{\partial T}{\partial y} \right] \\ + Pr \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

- *Équation de la fonction de courant :*

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\Omega \quad (3)$$

A ces équations, il convient d'ajouter les conditions pariétales d'adhérence, d'imperméabilité et d'isothermie ainsi que les conditions initiales. Pour ces dernières, sauf avis contraire lorsqu'il s'agira d'étudier leur influence sur la dynamique du système, nous considérons que la température initiale d'équilibre du système est $T_0^* = T_{fr}^*$.

Ainsi, il vient :

- *Conditions initiales ($t \leq t_0$) :*

$$U = 0; \quad V = 0; \quad \Psi = 0 \quad \text{et} \quad T = 0 \quad (4)$$

- *Conditions sur les parois AB et CD (pour $t > t_0$) :* pour $0 \leq x \leq 1$; $y = 0$ et $y = 1$

$$U = 0; \quad V = 0; \quad \Psi = 0 \quad \text{et} \quad T = 1 \quad (5)$$

- *Conditions sur les parois BC et AD (pour $t > t_0$) :* pour $0 < y < 1$; $x = 0$ et $x = 1$

$$U = 0; \quad V = 0; \quad \Psi = 0 \quad \text{et} \quad T = 0 \quad (6)$$

3. MÉTHODE NUMÉRIQUE DE RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DE TRANSFERT ET COMPARAISON AVEC DES RÉSULTATS DE LA LITTÉRATURE

Le système différentiel (1)–(6) est résolu à l'aide d'une méthode aux différences finies. La discrétisation est centrée pour les dérivées spatiales; elle est vers l'avant et au premier ordre pour les dérivées temporelles. La condition pariétale sur la vorticité est discrétisée suivant la technique de Woods [16]. Les formes discrétisées des équations de la chaleur et de la vorticité sont résolues par la méthode implicite aux directions alternées [17] associée à la méthode d'élimination de Gauss. La fonction de courant est obtenue en résolvant l'équation (3) à l'aide d'une méthode de sur-relaxation successive [18]. A chaque pas de temps, les calculs sont arrêtés quand le critère

$$\frac{\sum_i \sum_j |f_{i,j}^{k+1} - f_{i,j}^k|}{\sum_i \sum_j |f_{i,j}^{k+1}|}$$

est strictement inférieur à 10^{-6} , si f (calculé à l'itération d'indice k) désigne la fonction de courant ou quand il est strictement inférieur à 10^{-5} , si f désigne la vorticité ou la température.

Notons que la transformation, à l'aide d'une discrétisation, d'un flot en application est susceptible de faire apparaître, dans cette dernière, des comportements qui ne sont pas présents dans le premier.

D'une façon générale, plus la valeur du nombre de Rayleigh est grande, plus les résultats sont sensibles aux choix des pas d'espace et de temps. Lorsque la solution asymptotique à grand temps est instationnaire, les fréquences, déterminées à l'aide de la transformation de Fourier rapide (TFR) [19] avec une résolution spectrale inférieure à 0,2, le sont beaucoup plus que les amplitudes. La *figure 2(a)* et le *tableau I(a)*, relatifs à $Ra = 3 \cdot 10^6$, montrent les variations de la première fréquence des spectres de Nu_{AB+CD} et de Ψ_{\max} pour plusieurs maillages lorsque le pas de temps est égal à 10^{-5} . La *figure 2(b)* et le *tableau I(b)* donnent, quant à eux, pour le maillage spatial (111×111) , les variations de la première fréquence des spectres de Nu_{AB+CD} et de Ψ_{\max} pour plusieurs valeurs du pas de temps. Ces résultats justifient nos choix d'un maillage (111×111) et d'un pas de temps égal à $9 \cdot 10^{-6}$.

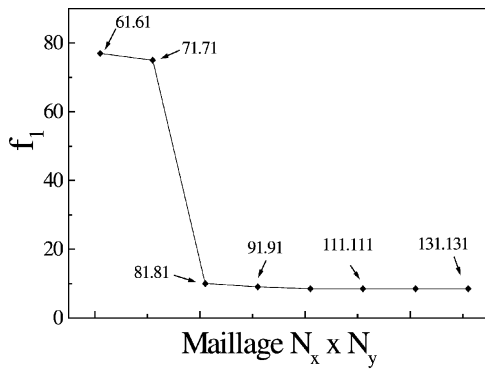
Pour juger la fiabilité de notre code de calcul, nous l'avons utilisé dans le cas où les parois AB et CD sont horizontales et adiabatiques tandis que les parois

TABLEAU I / TABLE I

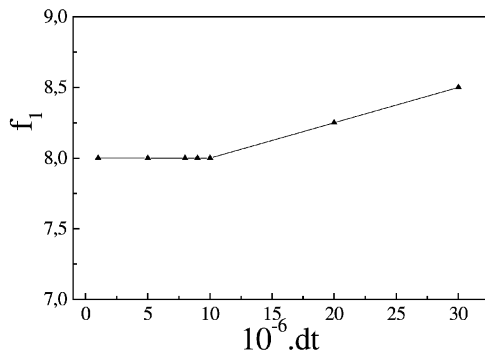
Variations de la première fréquence f_1 du spectre d'amplitude des signaux de Nu_{AB+CD} et de Ψ_{max} pour $Ra = 3 \cdot 10^6$:
 (a) influence du maillage d'espace pour $dt = 10^{-5}$; (b) influence du pas de temps pour $N_x \times N_y = 111 \times 111$.
 Variations of the first frequency f_1 of Nu_{AB+CD} and of Ψ_{max} amplitude spectrum for $Ra = 3 \cdot 10^6$: (a) influence of the space mesh for $dt = 10^{-5}$; (b) influence of the time step for $N_x \times N_y = 111 \times 111$.

| (a) | | | | | | | | |
|------------------|---------|---------|---------|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $N_x \times N_y$ | 61 × 61 | 71 × 71 | 81 × 81 | 91 × 91 | 101 × 101 | 111 × 111 | 121 × 121 | 131 × 131 |
| f_1 | 77 | 75 | 10 | 9 | 8 | 8 | 8 | 8 |

| (b) | | | | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Pas de temps dt | $3 \cdot 10^{-5}$ | $2 \cdot 10^{-5}$ | $1 \cdot 10^{-5}$ | $9 \cdot 10^{-6}$ | $8 \cdot 10^{-6}$ | $5 \cdot 10^{-6}$ | $1 \cdot 10^{-6}$ |
| f_1 | 8,5 | 8,25 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |



(a)



(b)

Figure 2. Variations de la première fréquence f_1 des spectres d'amplitude des signaux de Nu_{AB+CD} et de Ψ_{max} pour $Ra = 3,7 \cdot 10^6$: (a) influence du maillage d'espace pour $dt = 10^{-5}$; (b) influence du pas de temps pour le maillage $N_x \times N_y = 111 \times 111$.

Figure 2. Variations of the first frequency f_1 of Nu_{AB+CD} and Ψ_{max} amplitude spectrum for $Ra = 3,7 \cdot 10^6$: (a) influence of the space mesh for $dt = 10^{-5}$; (b) influence of the time step for $N_x \times N_y = 111 \times 111$.

BC et AD sont verticales et portées aux températures T_{ch} et T_{fr} respectivement. Nous avons alors comparé nos résultats à ceux de De Vahl Davis [20] pour des nombres de Rayleigh égaux à 10^3 , 10^4 , 10^5 et 10^6 en prenant respectivement les valeurs suivantes pour les pas de temps et d'espace : 10^{-4} et 41×41 ; $7 \cdot 10^{-5}$ et 51×51 ; $5 \cdot 10^{-5}$ et 61×61 ; $3 \cdot 10^{-5}$ et 71×71 . Nous rassemblons, dans le *tableau II*, les valeurs de la fonction de courant minimale, de la fonction de courant au centre de l'enceinte, du nombre de Nusselt global sur la paroi AD, du nombre de Nusselt local maximal et de l'ordonnée du point correspondant de la paroi, du nombre de Nusselt local minimal et de l'ordonnée du point correspondant de la paroi, de la composante U maximale de la vitesse et de l'ordonnée du point correspondant sur le plan vertical fictif équidistant des deux parois BC et AD ainsi que de la composante V maximale de la vitesse et de l'abscisse du point correspondant sur le plan horizontal fictif équidistant des parois inférieure et supérieure. On voit que les écarts entre nos valeurs et celles de De Vahl Davis sont de l'ordre de 0,5% pour le nombre de Nusselt global et de 0,1% pour la fonction de courant. La comparaison des résultats est donc satisfaisante.

Il existe plusieurs méthodes pour discrétiser la condition pariétale sur la vorticité. Pour opérer notre choix, nous avons comparé les résultats obtenus en utilisant les techniques proposées par Thom [21], Jansen [21] et Woods [16] à ceux de De Vahl Davis pour un nombre de Rayleigh égal à 10^6 en prenant respectivement comme valeurs de pas de temps et d'espace : $3 \cdot 10^{-5}$ et 71×71 . Il résulte de cette comparaison (*tableau III*) que la discrétisation au premier ordre de Thom conduit à des écarts plus importants que celles, au second ordre, de Jansen et Woods qui donnent des résultats quasiment identiques. Nous avons retenu la technique de Woods.

TABLEAU II / TABLE II
 Comparaison entre des valeurs issues de notre code de calcul et des valeurs de De Vahl Davis [20].
 Comparison of our results with De Vahl Davis values [20].

| | | $Ra = 10^3$ | $Ra = 10^4$ | $Ra = 10^5$ | $Ra = 10^6$ |
|-----------------------|----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| \overline{Nu}_{AD} | De Vahl Davis | 1,117 | 2,238 | 4,509 | 8,817 |
| | Présent calcul | 1,087 | 2,243 | 4,519 | 8,799 |
| Nu_{max} y | De Vahl Davis | 1,505 | 3,528 | 7,717 | 17,925 |
| | Présent calcul | 0,092 | 0,143 | 0,081 | 0,0378 |
| | | 1,508 | 3,538 | 7,758 | 18,02 |
| | | 0,086 | 0,143 | 0,082 | 0,040 |
| Nu_{min} y | De Vahl Davis | 0,692 | 0,586 | 0,729 | 0,989 |
| | Présent calcul | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | 0,691 | 0,583 | 0,723 | 0,981 |
| | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| U_{max} y | De Vahl Davis | 3,649 | 16,178 | 34,73 | 64,63 |
| | Présent calcul | 0,813 | 0,828 | 0,85 | 0,857 |
| | | 3,643 | 16,15 | 34,66 | 64,71 |
| | | 0,814 | 0,828 | 0,85 | 0,857 |
| V_{max} x | De Vahl Davis | 3,697 | 19,617 | 68,59 | 219,36 |
| | Présent calcul | 0,178 | 0,119 | 0,066 | 0,0379 |
| | | 3,697 | 19,55 | 67,97 | 217,41 |
| | | 0,170 | 0,114 | 0,071 | 0,042 |
| Ψ_{min} x/y | De Vahl Davis | – | – | –9,612 | –16,75 |
| | Présent calcul | –1,174 | –5,074 | –9,621 | –16,85 |
| | | 0,5/0,5 | 0,5/0,5 | 0,2857/0,6 | 0,157/0,543 |
| Ψ_c | De Vahl Davis | –1,174 | –5,071 | –9,111 | –16,32 |
| | Présent calcul | –1,174 | –5,073 | –9,126 | –16,43 |

TABLEAU III / TABLE III

Comparaison des résultats obtenus à partir de différentes techniques de discrétisation avec ceux de De Vahl Davis [20] pour $Ra = 10^6$, avec $N_x \times N_y = 71 \times 71$ et $dt = 3 \cdot 10^{-5}$. Le nombre entre parenthèses indique l'écart relatif.
 Comparison of our results obtained by different techniques of discretisation with those of De Vahl Davis [20] for $Ra = 10^6$, with $N_x \times N_y = 71 \times 71$ and $dt = 3 \cdot 10^{-5}$. In brackets, the number indicates the relative gap.

| $Ra = 10^6$ | Résultats de De Vahl Davis | Programme 1 | Programme 2 | Programme 3 | Programme 4 |
|--------------|-------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Nu_{AD} | 8,817 | 8,799 (0,2 %) | 8,845 (0,4 %) | 8,846 (0,3 %) | 9,088 (3,1 %) |
| Nu_{max} | 17,925 | 18,02 (0,5 %) | 19,66 (8,8 %) | 19,71 (9,0 %) | 21,35 (19 %) |
| Nu_{min} | 0,989 | 0,986 (0,3 %) | 1,073 (8,4 %) | 1,073 (8,4 %) | 1,062 (7,4 %) |
| U_{max} | 64,63 | 64,71 (0,1 %) | 63,35 (2,0 %) | 63,37 (1,9 %) | 64,67 (0,6 %) |
| V_{max} | 219,36 | 217,41 (0,9 %) | 212,4 (3,3 %) | 212,4 (3,2 %) | 215,9 (1,6 %) |
| Ψ_{min} | –16,75 | –16,85 (0,6 %) | –16,72 (0,2 %) | –16,72 (0,2 %) | –17,03 (1,7 %) |
| Ψ_c | –16,32 | –16,43 (0,7 %) | –16,30 (0,1 %) | –16,30 (0,1 %) | –16,60 (1,7 %) |

Programme 1 : les équations de chaleur et de vorticité écrites sous leurs formes divergentes associées à la condition pariétale sur la vorticité donnée par Woods.

Programme 2 : les équations de chaleur et de vorticité écrites sous leurs formes non conservatives associées à la condition pariétale sur la vorticité donnée par Woods.

Programme 3 : les équations de chaleur et de vorticité écrites sous leurs formes non conservatives associées à la condition pariétale sur la vorticité donnée par Jansen.

Programme 4 : les équations de chaleur et de vorticité écrites sous leurs formes non conservatives associées à la condition pariétale sur la vorticité donnée par Thom.

4. ÉVOLUTION DE LA SOLUTION ASYMPTOTIQUE À GRAND TEMPS EN FONCTION DU NOMBRE DE RAYLEIGH

4.1. Du point limite au cycle limite

Même aux très faibles valeurs du nombre de Rayleigh, lorsque le transfert de chaleur est essentiellement conductif, il existe un mouvement par suite de l'inclinaison des parois. Les grandeurs dynamiques évoluent, à grand temps, vers une limite asymptotique stationnaire. Par exemple, la *figure 3* représente, pour $Ra = 10^5$, les évolutions dans le temps de Nu_{AB+CD} (*figure 3(a)*), la trajectoire projetée dans l'espace des phases bidimensionnel (Nu_{AB+CD} , dNu_{AB+CD}/dt) (*figure 3(b)*) ainsi que les lignes de courant de l'écoulement (*figure 3(c)*) et les isothermes (*figure 3(d)*). On voit que l'écoulement est bicellulaire. Le plan diagonal horizontal de trace BD sépare un tourbillon supérieur tournant dans le sens horaire (négatif) d'un tourbillon inférieur tournant dans le sens trigonométrique (positif). Notons que la couche de mélange entre les deux tourbillons est horizontale.

Lorsqu'on augmente le nombre de Rayleigh, l'écoulement stationnaire s'intensifie et le temps de calcul nécessaire pour obtenir la limite asymptotique est de plus en plus grand.

Il existe une valeur du nombre de Rayleigh critique située dans l'intervalle $[1,11 \cdot 10^5; 1,12 \cdot 10^5]$, à partir de laquelle l'attracteur est périodique comme l'indique la *figure 4(a)* qui représente les évolutions temporelles de Nu_{AB+CD} et de Ψ_{max} pour Ra égal à $1,13 \cdot 10^5$. Le tracé des spectres d'amplitude (*figure 4(b)*) confirme l'existence d'un cycle limite et donne, aussi bien pour Nu_{AB+CD} que pour Ψ_{max} , la fréquence $f_1 = 13,7$. La *figure 4(c)* montre ce cycle limite dans l'espace des phases bidimensionnel (Nu_{AB+CD} , dNu_{AB+CD}/dt).

Lorsque Ra dépasse $1,12 \cdot 10^5$, la fréquence du cycle reste quasiment invariante (*tableau IV*) alors que son amplitude (*figure 5(a)*) augmente presque linéairement

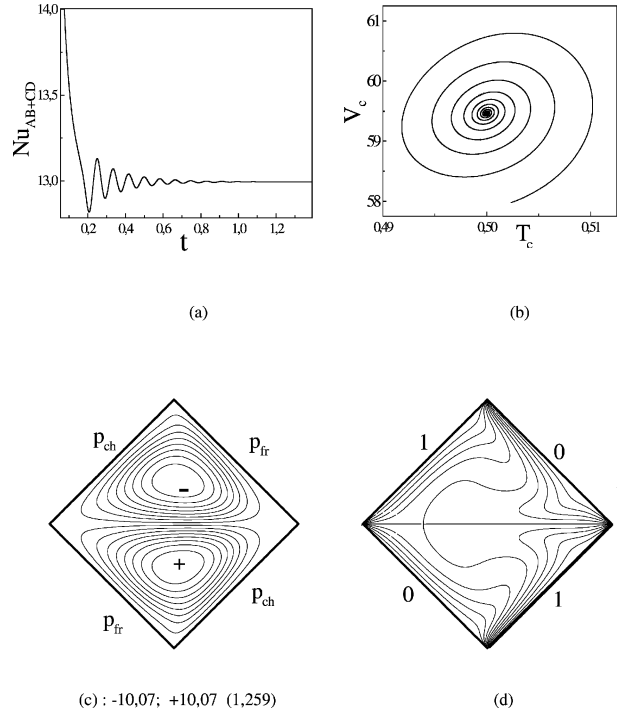


Figure 3. Représentations des évolutions temporelles du nombre de Nusselt global Nu_{AB+CD} (a), de la trajectoire dans le plan des phases (T_c , V_c) (b), des lignes de courant (c) et des isothermes (d) pour $Ra = 10^5$. Les surfaces isothermes sont également espacées de la paroi chaude ($T = 1$) à la paroi froide ($T = 0$), l'écart entre deux isothermes est de 0,1. Pour les lignes de courant, le premier nombre donne la valeur de la fonction de courant maximale ; le deuxième, celle de la fonction de courant minimale et le troisième, l'écart entre deux valeurs successives de la fonction de courant.

Figure 3. Representations of time evolutions of the global Nusselt number Nu_{AB+CD} (a), of the trajectory in the phase plane (T_c , V_c) (b), of the streamlines (c) and of the isotherms (d) for $Ra = 10^5$. The isotherm surfaces are equally spaced from the hot wall ($T = 1$) to the cold wall ($T = 0$), the gap between two isotherms is 0.1. For streamlines, the first number gives the maximal streamline value; the second, the minimal streamline value and the third, the gap between two successive streamlines.

avec $(Ra - 1,12 \cdot 10^5)^{1/2}$. Ces résultats indiquent que la bifurcation de Hopf traduisant la transition du point attracteur au cycle limite est surcritique [22]. Notons

TABLEAU IV / TABLE IV

Variations de l'amplitude et de la fréquence du cycle de Nu_{AB+CD} en fonction du nombre de Rayleigh au voisinage de la bifurcation point limite/cycle limite.

The limit cycle frequency variations versus the Rayleigh number around the bifurcation limit point/limit cycle.

| $10^5 \cdot Ra$ | 1,12 | 1,13 | 1,14 | 1,15 | 1,17 | 1,20 | 1,22 |
|---------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Amplitude du signal | 0,0256 | 0,0799 | 0,1081 | 0,1309 | 0,1671 | 0,2099 | 0,2341 |
| f_1 | 13,7 | 13,7 | 13,7 | 13,7 | 13,7 | 13,7 | 14,5 |

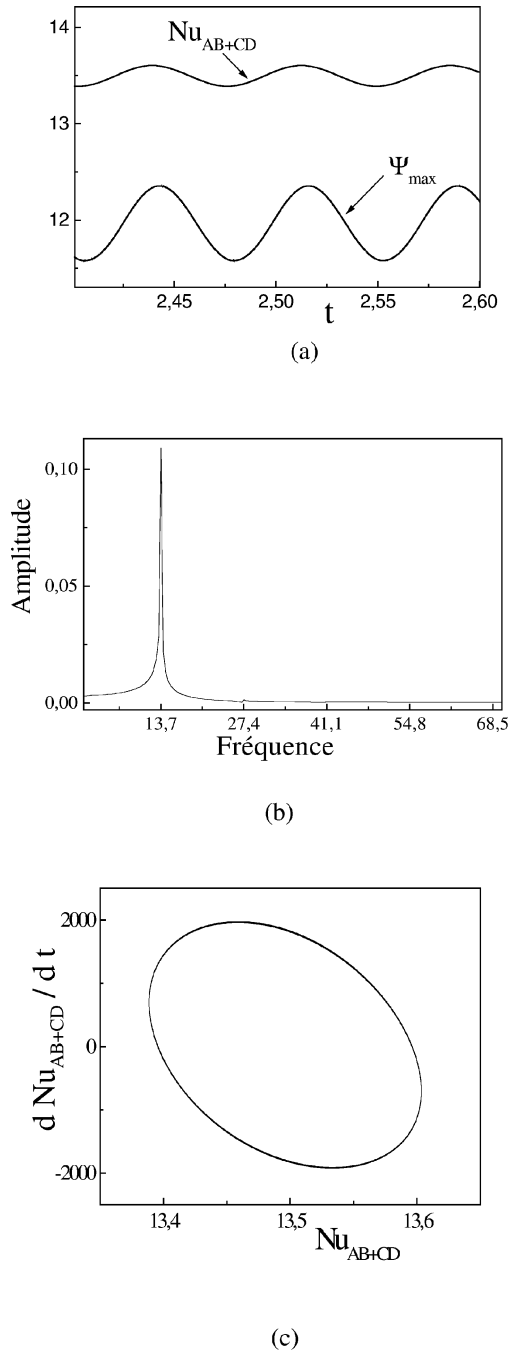
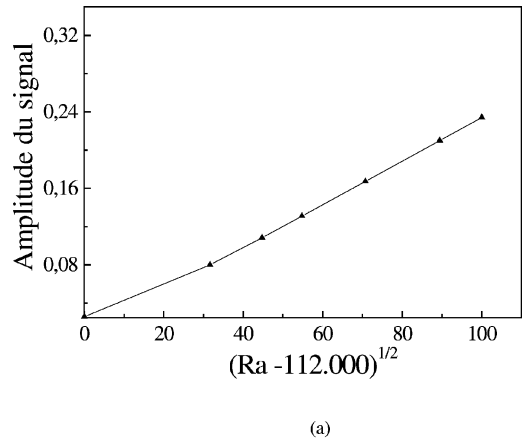
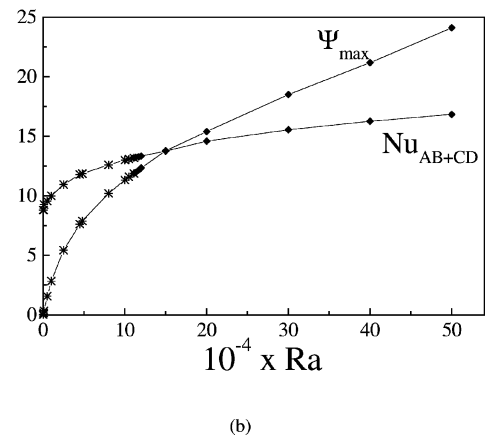


Figure 4. Représentations des évolutions temporelles du nombre de Nusselt global Nu_{AB+CD} et de la fonction de courant maximale Ψ_{max} (a), du spectre d'amplitude de Nu_{AB+CD} (b) et de la trajectoire dans le plan des $(Nu_{AB+CD}, dNu_{AB+CD}/dt)$ pour $Ra = 1,13 \cdot 10^5$.

Figure 4. Representations of time evolutions of the global Nusselt number Nu_{AB+CD} and of the maximal stream function Ψ_{max} (a), of the Nu_{AB+CD} amplitude spectrum (b), of the trajectory in the $(Nu_{AB+CD}, dNu_{AB+CD}/dt)$ phase plane for $Ra = 1.13 \cdot 10^5$.



(a)



(b)

Figure 5. Influence du nombre de Rayleigh au voisinage du point de bifurcation : (a) variations de l'amplitude de Nu_{AB+CD} en fonction de $(Ra - 1,12 \cdot 10^5)^{1/2}$; (b) variations des valeurs moyennes de Nu_{AB+CD} et de Ψ_{max} .

Figure 5. Influence of the Rayleigh number around the bifurcation point: (a) variations of Nu_{AB+CD} amplitude according to $(Ra - 1.12 \cdot 10^5)^{1/2}$; (b) variations of the average Nu_{AB+CD} values and Ψ_{max} .

que les courbes représentant les variations des valeurs moyennes du nombre Nu_{AB+CD} et de Ψ_{max} sur une période prolongent celles montrant les variations de Nu_{AB+CD} et de Ψ_{max} obtenues pour $Ra < 1,12 \cdot 10^5$ (figure 5(b)).

La figure 6 représente, pour $Ra = 1,20 \cdot 10^5$, les lignes de courant et les isothermes à plusieurs instants du cycle. Dans la première demi-période, on observe une dilatation du tourbillon supérieur accompagnée d'une contraction du tourbillon inférieur; dans la seconde, le phénomène s'inverse.

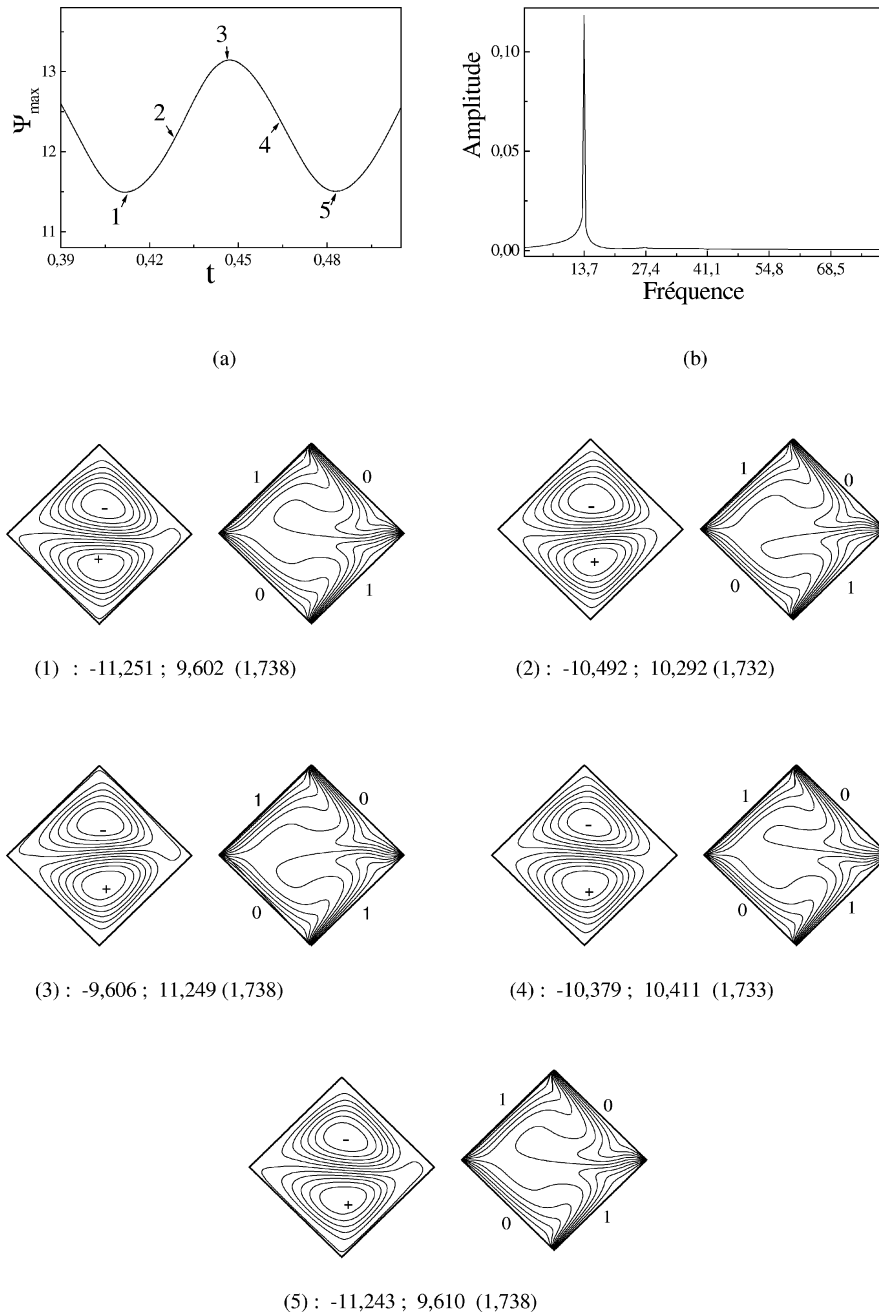


Figure 6. Représentations pour $Ra = 1,20 \cdot 10^5$: (a) signal de Ψ_{\max} ; (b) spectre d'amplitude de Ψ_{\max} ; (c) lignes de courant et isothermes à différents instants (1) $t = 0,4128$; (2) $t = 0,4288$; (3) $t = 0,4464$; (4) $t = 0,4656$; (5) $t = 0,4832$. Le premier nombre donne la valeur de la fonction de courant maximale ; le deuxième, celle de la fonction de courant minimale et le troisième, l'écart entre deux valeurs successives de la fonction de courant. Les surfaces isothermes sont également espacées de la paroi chaude ($T = 1$) à la paroi froide ($T = 0$), l'écart entre deux isothermes est de 0,1.

Figure 6. Representations for $Ra = 1.20 \cdot 10^5$: (a) Ψ_{\max} temporal signal; (b) Ψ_{\max} amplitude spectrum; (c) streamlines and isotherms at different instants (1) $t = 0.4128$; (2) $t = 0.4288$; (3) $t = 0.4464$; (4) $t = 0.4656$; (5) $t = 0.4832$. The isotherm surfaces are equally spaced from the hot wall ($T = 1$) to the cold wall ($T = 0$), the gap between two isotherms is 0.1. For streamlines, the first number gives the maximal streamline value; the second, the minimal streamline value and the third, the gap between two successive streamlines.

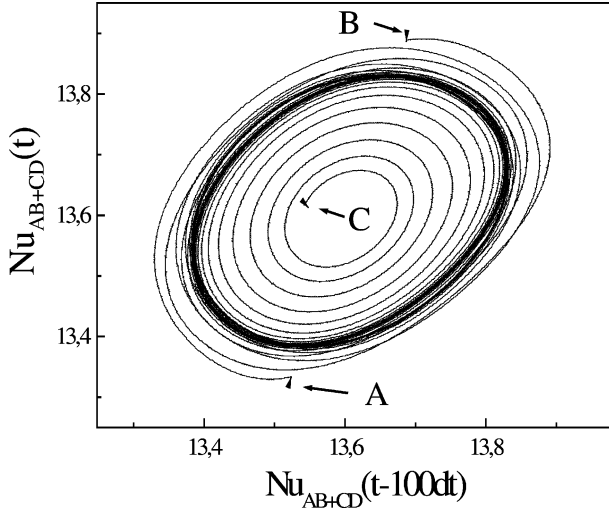


Figure 7. Insensibilité du cycle limite aux conditions initiales pour $Ra = 1,2 \cdot 10^5$. (A) $T_0^* = T_{fr}^*$; (B) $T_0^* = T_{ch}^*$; (C) $(T_{ch}^* + T_{fr}^*)/2$.

Figure 7. Nonsensitive dependence of the limit cycle on the initial conditions for $Ra = 1,20 \cdot 10^5$. (A) $T_0^* = T_{fr}^*$; (B) $T_0^* = T_{ch}^*$; (C) $(T_{ch}^* + T_{fr}^*)/2$.

Quant à la *figure 7*, elle montre l'insensibilité de l'attracteur aux conditions initiales. Précisons que la durée des calculs nécessaire pour atteindre le cycle limite est beaucoup plus longue lorsque la température initiale est égale à la moyenne arithmétique des températures pariétales que lorsqu'elle l'est à l'une ou l'autre de ces températures.

4.2. La cascade sous-harmonique

Le *tableau V*, tiré des variations de Nu_{AB+CD} et de Ψ_{max} en fonction du temps rassemble, par valeurs croissantes, les fréquences déduites des spectres d'amplitude, pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh. Les observations suivantes s'imposent.

Pour $Ra > 1,20 \cdot 10^5$, la fréquence de base augmente en même temps qu'apparaissent des harmoniques; pour $1,078 \cdot 10^6 < Ra < 1,0785 \cdot 10^6$, elle diminue de moitié passant de 48 à 24; un deuxième doublement de période pour $1,105 \cdot 10^6 < Ra < 1,108 \cdot 10^6$ l'abaisse à 12; elle devient égale à 6 pour $1,1143 \cdot 10^6 < Ra < 1,1149 \cdot 10^6$, chute à 3 pour $1,116 \cdot 10^6 < Ra < 1,1163 \cdot 10^6$, à 1,5 pour $1,11655 \cdot 10^6 < Ra < 1,11665 \cdot 10^6$ et à 0,75 pour $Ra \geq 1,11693 \cdot 10^6$. A titre d'illustration, la *figure 8* présente, pour $Ra = 1,11683 \cdot 10^6$, les variations temporelles de Nu_{AB+CD} et de Ψ_{max} , les spectres d'amplitude et le cycle limite de période 32 (après le cinquième doublement) dans le plan des phases $(Nu_{AB+CD}, dNu_{AB+CD}/dt)$.

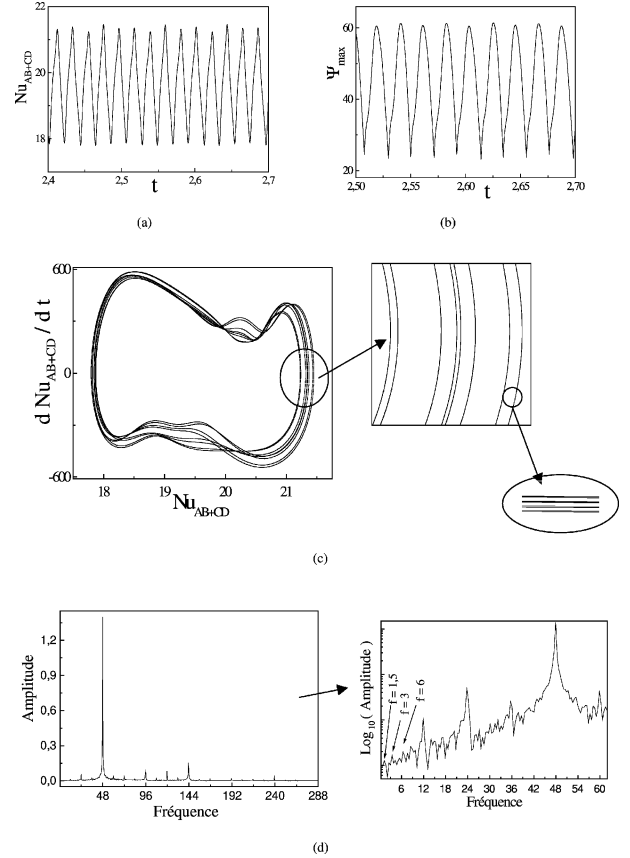


Figure 8. Illustration du cinquième doublement de période pour $Ra = 1,11683 \cdot 10^6$: (a) évolution temporelle de Nu_{AB+CD} ; (b) évolution temporelle de Ψ_{max} ; (c) trajectoire dans le plan des phases $(Nu_{AB+CD}, dNu_{AB+CD}/dt)$; (d) spectre d'amplitude du signal de Nu_{AB+CD} .

Figure 8. Illustration of the fifth period-doubling when $Ra = 1,11683 \cdot 10^6$: (a) Nu_{AB+CD} temporal signal; (b) Ψ_{max} temporal signal; (c) trajectory in the $(Nu_{AB+CD}, dNu_{AB+CD}/dt)$ phase plane (d) Nu_{AB+CD} amplitude spectrum.

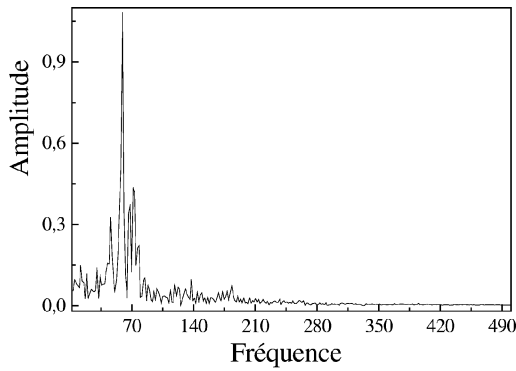
Notons que la fréquence de base est toujours la plus énergétique et que la suite des valeurs critiques du nombre de Rayleigh vérifie, à moins de 5% près, la constante de Coulet–Feigenbaum–Tresser.

4.3. Le chaos

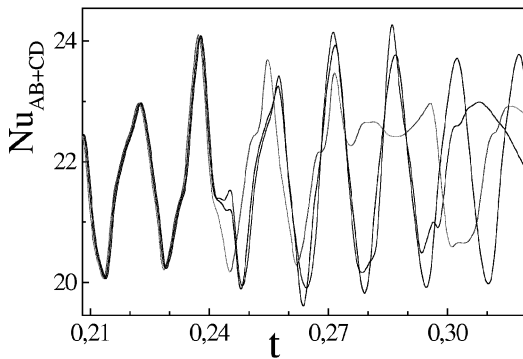
A partir de $Ra = 1,13 \cdot 10^6$, le signal temporel de Nu_{AB+CD} , son spectre d'amplitude et sa grande sensibilité aux conditions initiales ainsi que la projection de la trajectoire dans le plan $(Nu_{AB+CD}, dNu_{AB+CD}/dt)$ sont caractéristiques d'un attracteur chaotique ainsi que l'illustre la *figure 9* qui correspond à $Ra = 1,8 \cdot 10^6$.

TABLEAU V / TABLE V
 Valeurs des fréquences des signaux de Nu_{AB+CD} et de Ψ_{\max} en fonction du nombre de Rayleigh.
 Frequency values of Nu_{AB+CD} and Ψ_{\max} signals versus the Rayleigh number.

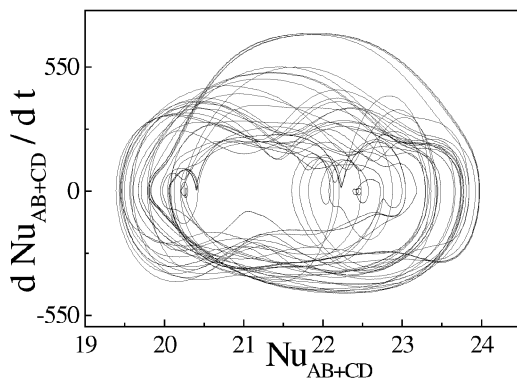
| Nombre de Ra | Fréquence f_1 | Harmoniques | | | | |
|----------------|-----------------|---|---------------|---------------|---------------|----------------|
| 111 000 | $f_1 = 0$ | | | | | |
| 112 000 | $f_1 = 13,7$ | | | | | |
| 113 000 | $f_1 = 13,7$ | | | | | |
| 114 000 | $f_1 = 13,7$ | | | | | |
| 115 000 | $f_1 = 13,7$ | | | | | |
| 116 000 | $f_1 = 13,7$ | | | | | |
| 117 000 | $f_1 = 13,7$ | | | | | |
| 118 000 | $f_1 = 13,7$ | | | | | |
| 119 000 | $f_1 = 13,7$ | | | | | |
| 120 000 | $f_1 = 13,7$ | | | | | |
| 122 000 | $f_1 = 14,5$ | | | | | |
| 150 000 | $f_1 = 15,2$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | |
| 200 000 | $f_1 = 17,2$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | |
| 300 000 | $f_1 = 19,5$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | |
| 500 000 | $f_1 = 26,5$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | |
| 700 000 | $f_1 = 38,0$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | |
| 800 000 | $f_1 = 41,1$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | |
| 1 000 000 | $f_1 = 45,8$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | |
| 1 078 000 | $f_1 = 48,0$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | |
| 1 078 500 | $f_1 = 24,0$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | ... |
| 1 080 000 | $f_1 = 24,0$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | ... |
| 1 085 000 | $f_1 = 24,0$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | ... |
| 1 100 000 | $f_1 = 24,0$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | ... |
| 1 108 000 | $f_1 = 12,0$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | |
| 1 108 900 | $f_1 = 12,0$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | ... |
| 1 110 000 | $f_1 = 12,0$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | ... |
| 1 112 500 | $f_1 = 12,0$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | ... |
| 1 114 300 | $f_1 = 12,0$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | ... |
| 1 114 900 | $f_1 = 06,0$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | ... |
| 1 115 220 | $f_1 = 06,0$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | ... |
| 1 115 500 | $f_1 = 06,0$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | ... |
| 1 116 000 | $f_1 = 06,0$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | ... |
| 1 116 300 | $f_1 = 03,0$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | ... |
| 1 116 550 | $f_1 = 03,0$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | ... |
| 1 116 830 | $f_1 = 01,5$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | ... |
| 1 116 890 | $f_1 = 01,5$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | ... |
| 1 116 930 | $f_1 = 0,75$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | ... |
| 1 116 950 | $f_1 = 0,75$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | $4 \cdot f_1$ | $5 \cdot f_1$ | ... |
| 1 130 000 | Spectre continu | | | | | |
| ⋮ | ⋮ | | | | | |
| 2 400 000 | Spectre continu | | | | | |
| 2 450 000 | $f_1 = 08,4$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | ... | ... | $25 \cdot f_1$ |
| 2 900 000 | $f_1 = 08,2$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | ... | ... | $25 \cdot f_1$ |
| 3 200 000 | $f_1 = 08,0$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | ... | ... | $25 \cdot f_1$ |
| 3 700 000 | $f_1 = 08,0$ | $2 \cdot f_1$ | $3 \cdot f_1$ | ... | ... | $25 \cdot f_1$ |
| 3 900 000 | $f_1 = 08,0$ | Spectre avec un bruit de fond important | | | | |
| 4 000 000 | Spectre continu | | | | | |
| ⋮ | ⋮ | | | | | |



(a)



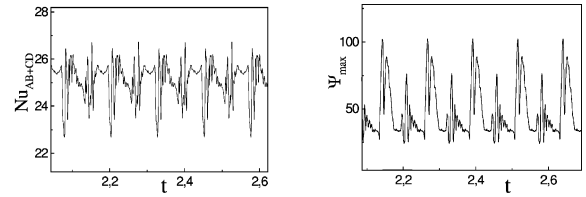
(b)



(c)

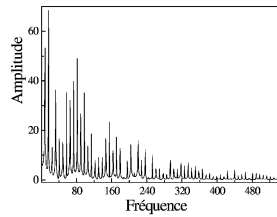
Figure 9. Sensibilité de l'attracteur aux conditions initiales pour $Ra = 1,8 \cdot 10^6$, $T_0 = 0$, $T_0 = -0,01$ et $T_0 = +0,01$: (a) spectre d'amplitude de Nu_{AB+CD} ; (b) évolutions temporelles de Nu_{AB+CD} ; (c) trajectoire dans le plan des phases $(Nu_{AB+CD}, dNu_{AB+CD}/dt)$.

Figure 9. Sensitive dependence of the attractor on initial conditions for $Ra = 1,8 \cdot 10^6$, $T_0 = 0$, $T_0 = -0,01$ and $T_0 = +0,01$. (a) Nu_{AB+CD} amplitude spectrum; (b) Nu_{AB+CD} temporal signal; (c) trajectory in the $(Nu_{AB+CD}, dNu_{AB+CD}/dt)$ phase plane.

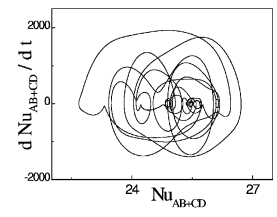


(a)

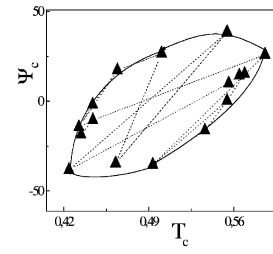
(b)



(c)



(d)



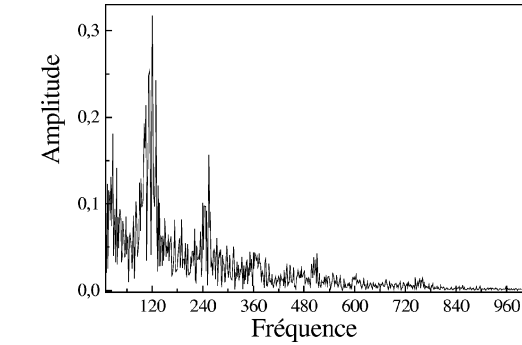
(e)

Figure 10. Illustration du phénomène de relaminarisation pour $Ra = 3,2 \cdot 10^6$: (a) évolution temporelle de Nu_{AB+CD} ; (b) évolution temporelle de Ψ_{\max} ; (c) spectre d'amplitude de Nu_{AB+CD} ; (d) trajectoire dans le plan des phases $(Nu_{AB+CD}, dNu_{AB+CD}/dt)$; (e) section de Poincaré (T_c, Ψ_c) pour $dNu_{AB+CD}/dt = 0$.

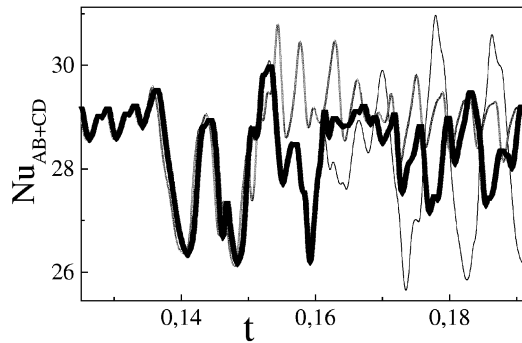
Figure 10. Illustration of the relaminarisation phenomenon for $Ra = 3,2 \cdot 10^6$: (a) Nu_{AB+CD} temporal signal; (b) Ψ_{\max} temporal signal; (c) Nu_{AB+CD} amplitude spectrum; (d) trajectory in the $(Nu_{AB+CD}, dNu_{AB+CD}/dt)$ phase plane; (e) Poincaré section (T_c, Ψ_c) for $dNu_{AB+CD}/dt = 0$.

Cependant, pour $Ra = 2,45 \cdot 10^6$ un phénomène de relaminarisation se manifeste et persiste jusqu'à $Ra = 3,9 \cdot 10^6$. Dans cette fenêtre laminaire, l'attracteur est un cycle limite inscrit sur un tore T^2 , comme en témoigne la figure 10 qui correspond à $Ra = 3,2 \cdot 10^6$ et présente les variations temporelles de Nu_{AB+CD} (figure 10(a)), de Ψ_{\max} (figure 10(b)) le spectre d'amplitude de Nu_{AB+CD} (figure 10(c)), la trajectoire de phase dans le plan $(Nu_{AB+CD}, dNu_{AB+CD}/dt)$ (figure 10(d)), la section de Poincaré (T_c, Ψ_c) correspondant à $dNu_{AB+CD}/dt = 0$ (figure 10(e)).

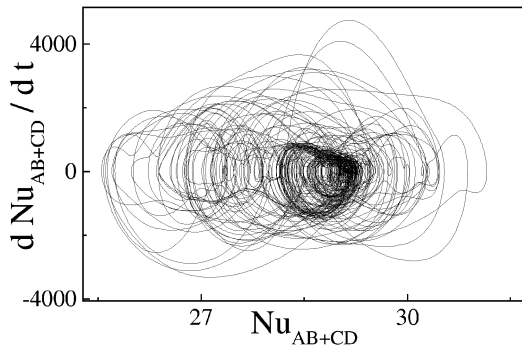
Pour $Ra > 4 \cdot 10^6$, l'attracteur semble à nouveau chaotique comme le montrent le signal temporel de Nu_{AB+CD} , son spectre d'amplitude et sa grande sensibilité aux



(a)



(b)



(c)

Figure 11. Sensibilité de l'attracteur aux conditions initiales pour $Ra = 6 \cdot 10^6$, $T_0 = 0$, $T_0 = -0,01$ et $T_0 = +0,01$: (a) spectre d'amplitude de Nu_{AB+CD} ; (b) évolutions temporelles de Nu_{AB+CD} ; (c) trajectoire dans le plan des phases (Nu_{AB+CD} , dNu_{AB+CD}/dt).

Figure 11. Sensitive dependence of the attractor on initial conditions for $Ra = 6 \cdot 10^6$, $T_0 = 0$, $T_0 = -0.01$ and $T_0 = +0.01$: (a) Nu_{AB+CD} amplitude spectrum; (b) Nu_{AB+CD} temporal signal; (c) trajectory in the (Nu_{AB+CD} , dNu_{AB+CD}/dt) phase plane.

TABLEAU VI / TABLE VI

Valeurs du plus grand exposant de Lyapunov [22, 23].
The largest Lyapunov exponent values [22, 23].

| Nombre de Rayleigh Ra | Plus grand exposant de Lyapunov L |
|----------------------------|--|
| $1,4 \cdot 10^6$ | 28,1 |
| $1,5 \cdot 10^6$ | 27,9 |
| $1,7 \cdot 10^6$ | 28,5 |
| $1,9 \cdot 10^6$ | 37,5 |
| $2,0 \cdot 10^6$ | 33,3 |
| $4 \cdot 10^6$ | 21,8 |
| $5 \cdot 10^6$ | 55,4 |
| $6 \cdot 10^6$ | 107,1 |
| $8 \cdot 10^6$ | 118,8 |
| $2 \cdot 10^7$ | 400,8 |
| $3 \cdot 10^7$ | 436,2 |
| $5 \cdot 10^7$ | 464,1 |

conditions initiales ainsi que la projection de la trajectoire dans le plan (Nu_{AB+CD} , dNu_{AB+CD}/dt). La figure 11 qui correspond à $Ra = 6 \cdot 10^6$ illustre ce résultat.

Les calculs, en fonction de Ra , des valeurs du plus grand exposant de Lyapunov [23] que nous avons effectués, à partir de la relation :

$$\begin{aligned} & [Nu(T_{01}, t) - Nu(T_{02}, t)] \\ &= [Nu(T_{01}, 0) - Nu(T_{02}, 0)] \exp(Lt) \end{aligned}$$

avec $T_{01} = 0$ et $T_{02} = 10^{-8}$, plaident en ce sens (tableau VI).

L est en effet positif. Sa décroissance dans l'intervalle $]1,9 \cdot 10^6; 4 \cdot 10^6[$ laisse supposer l'apparition d'un phénomène de relaminarisation, en accord avec les résultats précédents.

Nous avons calculé la dimension fractale des attracteurs à l'aide du code FD3 de Saraille [24] qui utilise les itérés d'une grandeur physique (ici Nu_{AB+CD}) et ses dérivées successives par rapport au temps. Cet ensemble de grandeurs définit un pseudo-espace des phases de dimension $n + 1$ où n est le nombre de dérivées. Quand on augmente n , FD3 donne des valeurs qui peuvent augmenter jusqu'à une limite correspondant à la dimension d de l'attracteur et déterminée à 10 % près environ. Les calculs donnent $d = 2,4$ pour un nombre de Rayleigh supérieur à $4 \cdot 10^6$ et $d = 1,4$ quand il est compris entre $1,3 \cdot 10^6$ et $2 \cdot 10^6$. Ce dernier résultat peut signifier que FD3 prend en compte les itérés appartenant à un cycle limite complexe (cycle ayant subi plusieurs doublements de période, cycle inscrit sur un tore, cycle bruyant apparaissant au-delà du point d'accumulation d'une cascade sous-harmonique) comme étalés sur une surface. En d'autres termes, l'utili-

sation de FD3 confirme la déstabilisation progressive du cycle limite lorsque d est compris entre 1 et 2 et l'apparition d'un attracteur étrange lorsqu'il est supérieur à 2.

5. CONCLUSION

L'étude numérique, à l'aide d'une méthode aux différences finies, de la convection naturelle thermique instationnaire bidimensionnelle, dans une cavité très allongée suivant un axe horizontal, de section droite carrée, inclinée de façon que ses plans diagonaux soient l'un vertical, l'autre horizontal et chauffée par deux côtés opposés, montre une transition vers le chaos lorsque le nombre de Rayleigh augmente. L'attracteur transite d'un point limite à un cycle limite via une bifurcation de Hopf surcritique pour une valeur comprise entre $1,11 \cdot 10^6$ et $1,12 \cdot 10^6$. Quand ce paramètre continue d'augmenter, l'attracteur traverse une cascade sous-harmonique et six doublements de période sont visibles. Un chaos semble apparaître lorsque Ra est de l'ordre de $1,13 \cdot 10^6$. Pour $2,45 \cdot 10^6$, un phénomène de relaminarisation se manifeste et persiste jusqu'à $3,9 \cdot 10^6$. Dans cette fenêtre laminaire, l'attracteur est un cycle limite inscrit sur un tore T^2 . Pour $Ra = 4 \cdot 10^6$, l'attracteur semble à nouveau chaotique. D'une façon générale, plus la valeur du nombre de Rayleigh est grande, plus les résultats sont sensibles aux choix des pas d'espace et de temps. Notamment, lorsque la solution asymptotique à grand temps est instationnaire, les fréquences le sont beaucoup plus que les amplitudes et déterminer la nature du chemin qu'emprunte le système selon le nombre de Rayleigh comporte de grands risques d'erreurs.

RÉFÉRENCES

- [1] Ostrach S., Natural convection in enclosures, in: Hartnett, Irvine (Eds.), *Advances in Heat Transfer*, Vol. 8, Academic Press, 1972.
- [2] Ostrach S., Natural convection in enclosures, ASME J. Heat Tran. 110 (1988) 1175.
- [3] Catton I., Natural convection in enclosures, in: Proc. 6th Int. Heat Transfer Conf., Vol. 6, 1978.
- [4] Ruelle D., Takens F., On the nature of turbulence, *Comm. Math. Phys.* 20 (1971) 167-192.
- [5] Gollub J.P., Benson S.V., Many routes to turbulences convection, *J. Fluid. Mech.* 100 (3) (1980) 449-470.
- [6] Le Quéré P., Penot F., Numerical and experimental investigation of the transition to unsteady natural convection of air in a vertical differentially heated cavity, ASME HTD 94 (1987) 75-82.
- [7] Le Quéré P., A note on multiple and unsteady solutions in two-dimensional convection in a tall cavity, *J. Heat Tran.* 112 (1990) 965-974.
- [8] Le Quéré P., Accurate solutions to the square thermally driven cavity at high Rayleigh number, *Comput. Fluids* 20 (1991) 29-41.
- [9] Briggs D.G., Jones D.N., Two-dimensional periodic natural convection in a rectangular enclosure of aspect ratio one, *J. Heat Tran.* 107 (1985) 850-854.
- [10] Penot F., Ndam A., Successive bifurcations of natural convection in vertical enclosure heated from the side, in: 1st European Thermal Sciences, Birmingham, UK, Vol. 1, 1992, pp. 507-514.
- [11] Wakitani S., Formation of cells in natural convection in a vertical slot at large Prandtl number, *J. Fluid. Mech.* 314 (1996) 299-314.
- [12] Wakitani S., Development of multicellular solutions in natural convection in an air-filled vertical cavity, *J. Heat Tran.* 119 (1997) 97-101.
- [13] Roux B., Grondin J.C., Bontoux P., De Vahl Davis G., Reverse transition from multicellular to monocellular motion in vertical fluid layer, *Phys. Chem. Hydrodyn.* 3 (3f) (1980) 292-297.
- [14] Chmaïssem W., Mise au point d'un programme de calcul numérique aux éléments finis bidimensionnels appliqué à l'étude de la convection naturelle thermique laminaire et permanente dans des enceintes fermées, Thèse de Doctorat de l'Université de Perpignan, 1998.
- [15] Chmaïssem W., Daguene M., Numerical study of the natural convection Boussinesq equations in parallelepipedal cavities with isothermal walls and heated from two sides: influence of wall conditions, *Energy Conversion and Management* 40 (1999) 1041-1056.
- [16] Woods L.C., A note on the numerical solution of fourth order differential equations, *Aeronautical Quarterly* 5 (3) (1953).
- [17] Yanenko N.N. (traduit par Nepomiastchy P.A.), *Méthode à pas fractionnaires*, Armand Colin, Paris, 1968.
- [18] Bejan A., *Convection Heat Transfer*, Wiley-Interscience, New York, 1984.
- [19] Verdun F.-R., Marshall A.G., *Transformée de Fourier (application en RMN et IRM)*, Masson, Paris, 1995.
- [20] De Vahl Davis G., Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution, *Internat. J. Numer. Methods Fluids* 3 (1983) 249-264.
- [21] Saadjian E., *Phénomènes de transport et leurs résolutions numériques*, Polytechnica, Paris, 1998.
- [22] Bergé P., Pomeau Y., Vidal Ch., *L'espace chaotique*, Hermann, Paris, 1998.
- [23] Baghious E., Étude d'un système différentiel à termes discontinus fortement non linéaires, dérivé du modèle de Lorenz et présentant un comportement chaotique, Thèse de Doctorat de l'Université de Bretagne occidentale, 1991.
- [24] Saraille J., Difalco, FD3 (program for finding fractal dimension), *Education and Psychological Measurement* 54 (1) (1994) 94-97.

Abridged English version

Using Boussinesq's model and finite-difference discretization procedures, the authors study numerically unsteady natural convection in an air-filled closed cavity with vertical square section ABCD, tilted in such a way that the diagonal planes are, the one (BD) horizontal and the other (AC) vertical, heated from two opposite sides. The third horizontal dimension must be lengthened enough for the flow and heat transfer to be two-dimensional.

Initially, the system is in thermodynamic equilibrium at the cold temperature T_{fr} . At the starting time t_0 , the sides AB and CD are submitted to the hot temperature T_{ch} and the sides BC and AD are kept fixed at the cold one T_{fr} . The Prandtl number is held fixed at 0.71 and the absence of radiation is assumed. Transfer equations, initial and boundary conditions are written in dimensionless forms, while using the stream function and vorticity.

The partial derivatives equations are solved numerically using finite-difference discretization procedures. Forward differences are used for the time derivatives and second-order central differences for all space derivatives. Discretized forms of the temperature and vorticity equations are solved by using alternate direction implicit method (ADI) associated to Gauss' elimination algorithm. The wall condition for the vorticity is discretized using the Woods technique. Stream function's values at all grid points are obtained using a successive over-relaxation method (SOR).

Variations by less than 10^{-6} over all grid points and at each time step are adopted for convergence. The larger the Rayleigh number is, the more sensitive the attractor becomes to time steps and mesh grids. Notably, when asymptotic solution is unsteady, frequencies, determined with the fast Fourier transformation (FFT), are more sensitive than signal amplitudes. The numerical model is validated with the De Vahl Davis benchmark solutions, in the case where the AB and CD sides are horizontal and adiabatic while the BC and AD sides are vertical and submitted respectively to temperatures T_{ch} and T_{fr} , for Rayleigh numbers equal to 10^3 , 10^4 , 10^5 and 10^6 .

Even for small Rayleigh numbers, when heat is mainly transferred by conduction, a flow exists, induced by slant-

angle of the sides. Dynamic variables evolve with time, towards a steady asymptotic limit. The flow is two-cellular: a superior cell turning in clockwise direction (negative) is separated, by the horizontal diagonal plane, of a lower cell that turns in counterclockwise direction (positive).

When the Rayleigh number is increased, the stationary flow becomes more intense and the necessary time to get to the asymptotic limit becomes longer. There is a critical Rayleigh number between 111 000 and 112 000 from which the attractor is periodic.

From $Ra = 1.12 \cdot 10^5$, around the bifurcation point, the frequency remains invariant whereas the amplitudes increase linearly with $(Ra - 1.12 \cdot 10^5)^{1/2}$. This tells us that the bifurcation from the point attractor to the limit cycle is an over-critical Hopf bifurcation. The observation of streamlines shows that superior cell dilation is accompanied by a low cell contraction in the first half period; in the second half, the phenomenon is reverse.

For $Ra > 1.20 \cdot 10^5$, the basic frequency increases, and harmonics appear. For $1.078 \cdot 10^6 < Ra < 1.0785 \cdot 10^6$, a period-doubling occurs. The basic frequency passes from 48 to 24, a second period-doubling for $1.105 \cdot 10^6 < Ra < 1.108 \cdot 10^6$ lowers this one to 12. It becomes equal to 6 for $1.1143 \cdot 10^6 < Ra < 1.1149 \cdot 10^6$, falls to 3 for $1.116 \cdot 10^6 < Ra < 1.1163 \cdot 10^6$, to 1.5 for $1.11655 \cdot 10^6 < Ra < 1.11665 \cdot 10^6$ and to 0.75 for $Ra \geq 1.11693 \cdot 10^6$.

The basic frequency remains always more energetic, and the successive critical Rayleigh number values verify the Couillet–Feigenbaum–Tresser constant with an uncertainty of 5 %.

For $Ra > 1.13 \cdot 10^6$, the Nu_{AB+CD} signal, its amplitude spectrum, its representations in various phase planes and its sensitive dependence on the initial conditions are characteristic of a chaotic attractor. However, for $Ra = 2.45 \cdot 10^6$, a laminar phenomenon appears and persists until $3.7 \cdot 10^6$. In this interval, the attractor is a limit cycle fit on a two-torus. For $Ra = 4 \cdot 10^6$, the attractor comes out chaotic again. The largest Lyapunov exponents, determined for several Rayleigh number values, are in agreement with the previous results.